《第４講　体積，複素数》

7　$f(x)=e^x\sin x$，$g(x)=a\sin x$ とする．ただし a は 0 以上の実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　b を定数とし

$$I=\int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx,\quad J=\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx$$

とおく．このとき，

$$I+J=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b,\quad I-J=\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$$

が成り立つことを示し，I と J を求めよ．

(2)　$f(x)=g(x)$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを求めよ．

(3)　(2)で求めた実数を x_0 とする．$0\leqq x\leqq x_0$ の範囲で 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

8　複素数α，β，γが表す複素数平面上の点を，それぞれ，A，B，Cとし，複素数平面の原点をOで表す．ただし，A≠B，A≠Oとする．以下の問いに答えよ．

(1)　方程式$\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$を満たす複素数$z$が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分OAの垂直二等分線であることを示せ．

(2)　$|\alpha|=|\beta|=1$とする．複素数平面上において，直線AB上の点を表す複素数zは，方程式$z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$を満たすことを示せ．

(3)　$|\alpha|=|\beta|=1$とする．複素数平面上において，点Cを通り直線ABに垂直な直線上の点を表す複素数zは，方程式$z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$を満たすことを示せ．

《第４講　体積，複素数》

7　$f(x)=e^x\sin x$，$g(x)=a\sin x$ とする．ただし a は0以上の実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　b を定数とし

$$I=\int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx,\quad J=\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx$$

とおく．このとき，

$$I+J=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b,\quad I-J=\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$$

が成り立つことを示し，I と J を求めよ．

(2)　$f(x)=g(x)$ を満たす正の実数 x のうち最小のものを求めよ．

(3)　(2)で求めた実数を x_0 とする．$0\leqq x\leqq x_0$ の範囲で2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

【答】　(1)　$I=\dfrac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b+e^{2b}\cos 2b-1)$，$J=\dfrac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b-e^{2b}\cos 2b+1)$

(2)
$$\begin{cases}\pi & (0\leqq a\leqq 1,\ a\geqq e^{\pi}\text{ のとき}) \\ \log a & (1<a<e^{\pi}\text{ のとき})\end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases}-\dfrac{\pi^2}{2}a^2+\dfrac{\pi e^{2\pi}}{8}-\dfrac{\pi}{8} & (0\leqq a\leqq 1\text{ のとき}) \\ \dfrac{\pi}{8}\{a^2\cos(2\log a)-a^2\sin(2\log a)+4a^2\log a-2a^2+1\} & (1<a<e^{\pi}\text{ のとき}) \\ \dfrac{\pi^2}{2}a^2-\dfrac{\pi e^{2\pi}}{8}+\dfrac{\pi}{8} & (a\geqq e^{\pi}\text{ のとき})\end{cases}$$

【解説】　(1)　$\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\right)'=e^{2x}\sin 2x+e^{2x}\cos 2x$ なので

$$\begin{aligned}I+J &= \int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx+\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx \\ &= \int_0^b (e^{2x}\sin 2x+e^{2x}\cos 2x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x\right]_0^b=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b\end{aligned}$$

同様に，$\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\right)'=e^{2x}\cos 2x-e^{2x}\sin 2x$ より

$$\begin{aligned}I-J &= \int_0^b e^{2x}\cos 2x\,dx-\int_0^b e^{2x}\sin 2x\,dx \\ &= \int_0^b (e^{2x}\cos 2x-e^{2x}\sin 2x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\right]_0^b=\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)\end{aligned}$$

また，$2I=(I+J)+(I-J)=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b+\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$ なので

$I=\frac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b+e^{2b}\cos 2b-1)$.

$2J=(I+J)-(I-J)=\frac{1}{2}e^{2b}\sin 2b-\frac{1}{2}(e^{2b}\cos 2b-1)$ なので

$J=\frac{1}{4}(e^{2b}\sin 2b-e^{2b}\cos 2b+1)$.

(2)　$e^x\sin x=a\sin x \iff (e^x-a)\sin x=0$ なので $e^x=a$ または $\sin x=0$．ここで $\sin x=0$ の正の最小の解は $x=\pi$ である．

$0\leqq a\leqq 1$ のとき，$e^x=a$ は正の実数解をもたないので，$f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $x=\pi$.

$1<a<e^\pi$ のとき，$e^x=a$ は π より小さい正の実数解をもつので $f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $x=\log a$.

$a\geqq e^\pi$ のとき，$e^x=a$ の正の実数解は π 以上となるので $f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $x=\pi$.

以上より $f(x)=g(x)$ の正の最小の解は $\begin{cases}\pi & (0\leqq a\leqq 1,\ a\geqq e^\pi \text{ のとき}) \\ \log a & (1<a<e^\pi \text{ のとき})\end{cases}$.

(3)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき，$0\leqq x\leqq \pi$ において $f(x)\geqq g(x)(\geqq 0)$ なので

$$\begin{aligned}
V(a) &= \int_0^\pi \pi\{f(x)\}^2dx-\int_0^\pi \pi\{g(x)\}^2dx \\
&= \pi\int_0^\pi (e^{2x}\sin^2 x-a^2\sin^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_0^\pi \left(e^{2x}\times\frac{1-\cos 2x}{2}-a^2\times\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{2x}\cos 2x\,dx+\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-a^2\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}(e^{2\pi}\sin 2\pi+e^{2\pi}\cos 2\pi-1)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2\pi}-a^2\pi-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{2}a^2+\frac{\pi e^{2\pi}}{8}-\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$1<a<e^\pi$ のとき，$0\leqq x\leqq \log a$ において $g(x)\geqq f(x)(\geqq 0)$ なので，同様に

$$\begin{aligned}
V(a) &= \int_0^{\log a} \pi\{g(x)\}^2dx-\int_0^{\log a} \pi\{f(x)\}^2dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\log a} e^{2x}\cos 2x\,dx-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-a^2\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\log a} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}\{e^{2\log a}\sin(2\log a)+e^{2\log a}\cos(2\log a)-1\} \\
&\qquad -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{2\log a}-a^2\left(\log a-\frac{1}{2}\sin(2\log a)\right)-\frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{\pi}{8}\{a^2\cos(2\log a)-a^2\sin(2\log a)+4a^2\log a-2a^2+1\}
\end{aligned}$$

$a \geqq e^{\pi}$ のとき，$0 \leqq x \leqq \pi$ において $g(x) \geqq f(x)\,(\geqq 0)$ なので

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^{\pi} \pi\{g(x)\}^2 dx - \int_0^{\pi} \pi\{f(x)\}^2 dx \\ &= \frac{\pi^2}{2}a^2 - \frac{\pi e^{2\pi}}{8} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

以上より，

$$V(a) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{2}a^2 + \dfrac{\pi e^{2\pi}}{8} - \dfrac{\pi}{8} & (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\pi}{8}\{a^2\cos(2\log a) - a^2\sin(2\log a) + 4a^2\log a - 2a^2 + 1\} & (1 < a < e^{\pi} \text{ のとき}) \\ \dfrac{\pi^2}{2}a^2 - \dfrac{\pi e^{2\pi}}{8} + \dfrac{\pi}{8} & (a \geqq e^{\pi} \text{ のとき}) \end{cases}$$

8 複素数α, β, γが表す複素数平面上の点を，それぞれ，A，B，Cとし，複素数平面の原点をOで表す．ただし，A≠B，A≠Oとする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式$\dfrac{z}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1$を満たす複素数$z$が表す点の複素数平面上の軌跡は，線分OAの垂直二等分線であることを示せ．

(2) $|\alpha|=|\beta|=1$とする．複素数平面上において，直線AB上の点を表す複素数zは，方程式$z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$を満たすことを示せ．

(3) $|\alpha|=|\beta|=1$とする．複素数平面上において，点Cを通り直線ABに垂直な直線上の点を表す複素数zは，方程式$z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$を満たすことを示せ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) 略

【解説】 (1) $\alpha\neq0$より

$$\begin{aligned}\frac{z}{\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=1 &\iff \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}\\ &\iff z\overline{z}=z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}\\ &\iff z\overline{z}=(z-\alpha)\left(\overline{z}-\overline{\alpha}\right)\\ &\iff |z|^2=|z-\alpha|^2\end{aligned}$$

となるので$|z|=|z-\alpha|$．よってzの表す点の軌跡はOAの垂直二等分線である．

(2) $z-\alpha$が$\beta-\alpha$の実数倍になるので，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$が実数．よって

$$\begin{aligned}\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)} &\iff \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\\ &\iff z-\alpha=\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\left(\overline{z}-\overline{\alpha}\right) \quad \cdots①\end{aligned}$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|=1$より

$$\begin{aligned}\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}+\alpha\beta &= \frac{\beta-\alpha+\alpha\beta\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\\ &= \frac{\beta\left(1-|\alpha|^2\right)-\alpha\left(1-|\beta|^2\right)}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\\ &= 0\end{aligned}$$

つまり$\dfrac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=-\alpha\beta$となるので

$$\begin{aligned}① \iff z-\alpha &= -\alpha\beta\left(\overline{z}-\overline{\alpha}\right)\\ &= -\alpha\beta\overline{z}+|\alpha|^2\beta\\ &= -\alpha\beta\overline{z}+\beta\end{aligned}$$

より$z+\alpha\beta\overline{z}=\alpha+\beta$が示された．

(3)　$z-\gamma$ が $(\beta-\alpha)i$ の実数倍になるので，$\dfrac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}$ が実数．よって

$$\frac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}=\overline{\left\{\frac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}\right\}} \iff \frac{z-\gamma}{(\beta-\alpha)i}=\frac{\overline{z}-\overline{\gamma}}{\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)(-i)}$$

$$\iff z-\gamma=-\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\left(\overline{z}-\overline{\gamma}\right)$$

となるが，(2)と同様に $-\dfrac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=\alpha\beta$ となるので

$$z-\gamma=\alpha\beta\left(\overline{z}-\overline{\gamma}\right) \iff z-\alpha\beta\overline{z}=\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}$$

が示された．